Simulations de variables aléatoires

Inversion de la fonction de répartition.

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire continue de densité f. On rappelle que sa fonction de répartition F est définie par $F(t) = P(X \leq t)$, pour $t \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer que la fonction $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ est croissante et continue.
(b) Donner un exemple de variable aléatoire X pour laquelle $F : \mathbb{R} \to]0,1[$ est (resp. n'est pas) une bijection.

En tant que fonction croissante, F admet une *fonction inverse généralisée* F^- définie par

$$\forall u \in [0,1],\ F^-(u) = \inf\{t \in \mathbb{R}, F(t) \geq u\}.$$

F^- est aussi appelée *fonction quantile* de X.

(c) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R},\ F^-(F(t)) \leq t$.
(d) Montrer que $\forall u \in]0,1[,\ F(F^-(u)) \geq u$.
(e) Montrer que $F^-(u) \leq t$ si et seulement si $u \leq F(t)$.
(f) Montrer que $F(X)$ suit la loi uniforme sur $[0,1]$.
(g) Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$. Montrer que $F^-(U)$ a la même loi que X.
(h) Supposons que l'on sait simuler une variable aléatoire uniforme sur $[0,1]$. En déduire une méthode de simulation de variables aléatoires de loi :
  (i) de loi exponentielle (de densité $\lambda e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{x>0}$);
  (ii) de loi de Rayleigh (de densité $xe^{-x^2/2}\mathbf{1}_{x>0}$);
  (iii) de loi de densité $2x^{-3}\mathbf{1}_{x>1}$.

Lois discrètes.

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble fini $\{1,\dots,k\}$ telle que $P(X = i) = p_i$, pour $1 \leq i \leq k$, avec $p_i \geq 0$ et $\sum_{j=1}^n p_j = 1$. Soit U un variable aléatoire uniforme sur $[0,1]$.

(a) Pour tout $1 \leq i \leq k-1$, calculer $P\big(\sum_{j=1}^i p_j \leq U < \sum_{j=1}^{i+1} p_j\big)$.
(b) En déduire la loi de $Y = \mathbf{1}_{\{U<p_1\}} + 2\mathbf{1}_{\{p_1 \leq U < p_1+p_2\}} + \ldots + k\mathbf{1}_{\{p_1+\ldots+p_{k-1} \leq U < 1\}}$.

Exercice 3. Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ.

(a) Donner la loi de $\lfloor X \rfloor$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière inférieure de x.
(b) En déduire un algorithme de simulation de la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ qui affecte à $k \in \mathbb{N}^*$ le poids $p(1-p)^{k-1}$.

Méthode du rejet.

Exercice 4. Soient $D, D' \subset \mathbb{R}^2$ tels que $D \subset D'$.

(a) Pour X une variable aléatoire de loi uniforme sur D', montrer que la loi conditionnelle de X sachant $\{X \in D\}$ est la loi uniforme sur D.
(b) Décrire un algorithme qui fournit des réalisations i.i.d. de la loi uniforme sur le disque unité dans $\mathbb{R}^2$ à partir des v.a. de loi uniforme sur le pavé $[-1,1]^2$.
(c) Quelle est la loi du nombre d'itérations ? Combien d'itérations en moyenne sont nécessaires ?